МДК.02.03 Оптимизация процессов транспортировки и проведение оценки стоимости затрат на хранение товарных запасов

ТЕМА 2. Транспортная задача

2.1. Математическая модель задачи транспортного типа

Транспортная задача (ТЗ) является важнейшей частной задачей линейного программирования, имеющей обширные практические приложения не только к проблемам транспорта. Она выделяется в линейном программировании определённостью экономической характеристики, особенностями математической модели, наличием специфических методов решения.

Простейшая формулировка транспортной задачи по критерию стоимости следующая: в m пунктах отправления $A_1, A_2, \ldots, A_m$ (будем называть их *поставщиками)* находится соответственно $a_1, a_2, \ldots, a_m$ единиц однородного груза *(ресурсов),* который должен быть доставлен *n потребителям* $B_1, B_2, \ldots, B_n$ в количествах $b_1, b_2, \ldots, b_n$ единиц соответственно (назовем их *потребностями).* Известны транспортные издержки c_{ij} перевозок единицы груза из i-го пункта отправления в j-й пункт потребления ($i = \overline{1,m}$, $j = \overline{1,n}$).

Требуется спланировать перевозки (т.е. указать, сколько единиц груза должно быть отправлено от i-го поставщика j-му потребителю) так, чтобы

1) весь груз из пунктов отправления был вывезен;
2) потребности каждого пункта потребления были полностью удовлетворены;
3) суммарные издержки на перевозки были минимальными.

Для наглядности условия транспортной задачи представим в виде таблицы, которая называется транспортной или распределительной.

Транспортная таблица

Поставщик	Потребитель				Запас
	B_1,	B_2	...	B_n	
A_1	x_{11} c_{11}	x_{12} c_{12}	…	x_{1n} c_{1n}	a_1
A_2	x_{21} c_{21}	x_{22} c_{22}	…	x_{2n} c_{2n}	a_2
...					…
A_m	x_{m1} c_{m1}	x_{m2} c_{m2}	…	x_{mn} c_{mn}	a_m

Потребность	b_1	b_2	…	b_n

Здесь количество груза, перевозимого из i-го пункта отправления в j-й пункт назначения, равно x_{ij}. Предполагается, что все $x_{ij} > 0$. Запас груза в *i-м* пункте отправления определяется величиной $a_i \geq 0$, а потребность j-го пункта назначения в грузе - $b_j > 0$.

Матрица (c_{ij}) называется *матрицей тарифов* (издержек или транспортных расходов). Планом транспортной задачи называется матрица перевозок X= (x_{ij}). Если в плане перевозок переменная X_{ij} принимает положительное значение, то его будем записывать в соответствующую клетку *(i,* j) и считать ее загруженной (занятой) или *базисной,* если же x_{ij} = 0, то клетку (i, j), как правило, оставляют *свободной.*

Составим *математическую модель* задачи транспортного типа. Общие суммарные затраты, связанные с реализацией плана перевозок, можно представить целевой функцией

$$z = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_{ij} \to \min. \quad (2.1)$$

Переменные *Xи* должны удовлетворять ограничениям по запасам (2.2), по потребностям (2.3) и условиям неотрицательности (2.4). В математической записи это можно представить так:

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = a_i, i = \overline{1, m}; \quad (2.2)$$

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} = b_j, j = \overline{1, n}; \quad (2.3)$$

$$x_{ij} \geq 0, \ i = \overline{1, m}, \ j = \overline{1, n}. \quad (2.4)$$

Таким образом, среди множества решений системы ограничений (2.2) -

(2.3) требуется найти такое неотрицательное решение, которое минимизирует целевую функцию (2.1). Полученная задача является задачей линейного программирования. Решение ТЗ проводится с помощью общего приема последовательного улучшения плана, который реализован в симплексном методе.

2.2. Этапы решения транспортной задачи

1. Определение исходного опорного плана.
2. Оценка этого плана.
3. Переход к следующему плану путем однократной замены одной из базисных переменных на свободную.

Условие баланса

Теорема. Для разрешимости транспортной задачи необходимо и достаточно, чтобы запасы в пунктах отправления были равны потребностям в грузе в пунктах назначения, т.е. выполнялось равенство

$$\sum_{i=1}^{m} a_i = \sum_{j=1}^{n} b_j \,. \qquad (2.5)$$

Если условие (2.5) выполнено, то модель ТЗ называется *закрытой* (сбалансированной). Задача с отсутствием баланса между ресурсами и потребностями называется *открытой* ($\sum_{i=1}^{m} a_i \neq \sum_{j=1}^{n} b_j$).

1. Если $\sum^{m} a_i > \sum^{n} b_j$, то в математическую модель вводится фиктивный $(n+1)$-й потребитель B_{n+1}, для которого потребность равна разности между суммарной мощностью поставщиков и фактическим спросом потребителей, т.е. $b_{n+1} = \sum^{m} a_i - \sum^{n} b_j$. Все тарифы на доставку груза с фиктивными потребностями считают равными нулю, т.е. $c_{i,n+1} = 0$, i= 1, m. Поэтому для новой задачи значение целевой функции не изменится. Иными словами, фиктивный потребитель не нарушит совместности системы ограничений. В транспортной таблице задачи предусматривается дополнительный столбец.

2. Если же $\sum_{i=1}^{m} a_i < \sum_{j=1}^{n} b_j$, то вводится фиктивный $(m + 1)$-й

поставщик A_{m+1}. Для этого в транспортную таблицу добавляется одна строка, запас груза для которой записывают равным $a_{m+1} = \sum^{n} b_j - \sum^{m} a_i$, а стоимости перевозок полагают равными нулю: $c_{m+1,j}$ =0, j = *1,n*. Поэтому в данном случае значение целевой функции не изменится, а система ограничений останется совместной.

2.3. Особенности системы ограничений

Система ограничений транспортной задачи (2.1)—(2.4) имеет ряд особенностей, что позволяет решать ее более рациональными способами.

1. Коэффициенты при неизвестных во всех ограничительных уравнениях равны единице.
2. Любая переменная встречается только в двух уравнениях.
3. Система уравнений ТЗ симметрична относительно всех переменных.
4. Матрица системы ограничений состоит из 0 и 1, причем любой столбец содержит только два элемента, равных 1, а остальные - 0.
5. Система ограничений содержит $m + n$ уравнений с $m \cdot n$ переменными. А так как $\sum_{i=1}^{m} a_i = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{m} x_{ij} = \sum_{j=1}^{n} b_j$, то ранг матрицы транспортной задачи на единицу меньше количества уравнений, т.е. $r = m + n - 1$, где m - число поставщиков; n - число потребителей. Следовательно, любое опорное решение системы ограничений транспортной задачи должно содержать $r = m+n-1$ базисных переменных и $m * n - r = (m-1)(n-1)$ свободных переменных, равных нулю.
6. Если все a_i и b_j - целые, тогда значения базисных переменных в допустимом базисном решении тоже целые. А так как это задача линейного программирования, то оптимальное решение является базисным допустимым решением и, следовательно, целым. (Это является гарантией, что в задаче не будет получено абсурдное решение, например 7,5 тумбочки.)

Задача № 2. Урожай картофеля, собранный фермерами $Ф_1$, $Ф_2$, $Ф_3$ в количествах 60, 45 и 130 т соответственно, должен быть доставлен в четыре магазина M_1, M_2, M_3, M_4. Спрос на картофель равен 50, 70, 60 и 80 т соответственно. Известна матрица транспортных расходов (в ден. ед.) на доставку 1 т картофеля:

$$C=\begin{pmatrix} 14 & 16 & 13 & 11 \\ 15 & 11 & 9 & 8 \\ 12 & 17 & 10 & 14 \end{pmatrix}.$$

Запланировать перевозку картофеля с минимальными затратами при условии, что запросы 3-го магазина должны быть удовлетворены полностью. Составить математическую модель задачи и привести ее к стандартной транспортной задаче с балансом.

Решение. Сведем исходные данные в табл. 2.1:

Таблица 2.1

Магазин / Фермер	B_1	B_2	B_3	B_4	Урожай картофеля, т
A_1	14	16	13	11	60
A_2	15	11	9	8	45
A_3	12	17	10	14	130
Потребности магазинов, т	50	70	60	80	$\sum a_i = 235$ / $\sum b_j = 260$

Построим математическую модель задачи. Пусть x_{ij} (j= 1,4,i= 1,3) - количество тонн картофеля, перевозимого i-м фермером j-му магазину. Тогда общие затраты, связанные с реализацией плана перевозок, представятся целевой функцией:

$$Z=\sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{4} c_{ij}x_{ij} \to \min$$

или

$Z=14x_{11}+16x_{12}+13x_{13}+11x_{14}+$

$15x_{21}+11x_{22}+9x_{23}+8x_{24}+$

$+12x_{31}+17x_{32}+10x_{33}+14x_{34} \to \min.$

Требуется спланировать перевозки так, чтобы весь груз из пунктов отправления был вывезен. Но поскольку суммарный объем картофеля, вывезенного от каждого фермера, не может превышать собранного им урожая, то переменные X_{ij} должны удовлетворять следующим ограничениям по запасам:

$x_{11}+x_{12}+x_{13}+x_{14}=60$ (для 1-го фермера),

$x_{21}+x_{22}+x_{23}+x_{24}=45$ (для 2-го фермера),

$x_{31}+x_{32}+x_{33}+x_{34}=130$ (для 3-го фермера).

Аналогично потребности каждого пункта потребления должны

быть полностью удовлетворены. Но поскольку потребность магазинов в картофеле (260 т) больше, чем собранный фермерами урожай (235 т), то спрос не всех магазинов будет полностью удовлетворен. Поэтому должны выполняться ограничения-неравенства по потребностям:

$x_{11} + x_{21} + x_{31} \leq 50$ (для 1-го магазина),
$x_{12} + x_{22} + x_{32} \leq 70$ (для 2-го магазина),
$x_{13} + x_{23} + x_{33} \leq 60$ (для 3-го магазина),
$x_{14} + x_{24} + x_{34} \leq 80$ (для 4-го магазина).

Объем перевозок картофеля не может быть отрицательным, поэтому справедливы условия неотрицательности на переменные: $x_{ij} \geq 0$.

Таким образом, сформулированная выше задача свелась к задаче нахождения таких неотрицательных значений переменных x_{ij}, которые удовлетворяют системам ограничений по поставкам и потребностям и минимизируют целевую функцию затрат. Однако транспортная задача разрешима только в том случае, когда выполняется условие баланса: $\sum_{i=1}^{3} a_i = \sum_{j=1}^{4} b_j$. В нашем примере

оно нарушено, так как

$$\sum_{i=1}^{3} a_i = 60 + 45 + 130 = 235,$$

$$\sum_{j=1}^{4} b_j = 50 + 70 + 60 + 80 = 260.$$

Следовательно, задача является открытой, несбалансированной. Поскольку $\sum_{i=1}^{3} a_i < \sum_{j=1}^{4} b_j$, то введем фиктивного фермера A_4, урожай картофеля у которого составит: $a_4 = \sum_{j=1}^{4} b_j - \sum_{i=1}^{3} a_i = 260 - 235 = 25$ (т).

Согласно условию запросы 3-го магазина должны быть полностью удовлетворены. Следовательно, стоимость транспортных расходов на доставку 1 т картофеля от фиктивного фермера A_4, в этот магазин необходимо сделать невыгодной, например $c_{43} > \max c_{ij} = 17$. Предположим, $c_{43} = 20$ (ден. ед.). А стоимость транспортных расходов на доставку 1 т картофеля от фиктивного фермера A_4 во все другие магазины будем полагать равной нулю: $c_{4j} = 0$.

Получим следующую закрытую модель транспортной задачи:

$Z = 14x_{11} + 16x_{12} + 13x_{13} + 11x_{14} + 15x_{21} + 11x_{22} + 9x_{23} + 8x_{24} + 12x_{31} + 17x_{32} + 10x_{33} + 14x_{34} \rightarrow \min.'$

$x_{11} + x_{12} + x_{13} + x_{14} = 60$ (для 1-го фермера),
$x_{21} + x_{22} + x_{23} + x_{24} = 45$ (для 2-го фермера),
$x_{31} + x_{32} + x_{33} + x_{34} = 130$ (для 3-го фермера)

$x_{41} + x_{42} + x_{43} + x_{44} = 25$ (для фиктивного фермера);

$x_{11} + x_{21} + x_{31} + x_{41} = 50$ (для 1-го магазина),
$x_{12} + x_{22} + x_{32} + x_{42} = 70$ (для 2-го магазина),
$x_{13} + x_{23} + x_{33} + x_{43} = 60$ (для 3-го магазина),
$x_{14} + x_{24} + x_{34} + x_{44} = 80$ (для 4-го магазина),

$x_{ij} > o$, i от 1 до 4, j от 1 до 4.

Решение сбалансированной транспортной задачи будет являться и решением исходной открытой задачи.

ВОПРОСЫ ПО ТЕМЕ:

1. Что такое – Транспортная таблица?
2. Объясните понятие сбалансированной транспортной задачи
3. Какой алгоритм приведения транспортной задачи к балансу?

Практическая работа

Постановка задачи

Товары с m баз поставляют в n магазинов. Потребности магазинов в товарах b_j тыс. ед. Запасы товаров на базах составляют a_i тыс. ед. Затраты на перевозку 1 тыс. ед. товара в ден. ед. представлены матрицей затрат С. Составить Транспортную таблицу по заданным условиям.

1 Вариант	2 Вариант

$\vec{a}=(10;12;11;7)$, $\vec{b}=(8;9;9;6;5)$, $C=\begin{pmatrix}3&9&2&1&6\\6&2&4&1&7\\1&4&8&3&2\\1&4&6&2&4\end{pmatrix}$.	$\vec{a}=(20;14;10;6)$, $\vec{b}=(14;11;14;9;4)$, $C=\begin{pmatrix}5&7&3&6&4\\6&4&3&2&5\\9&6&4&7&7\\2&4&6&8&5\end{pmatrix}$.
3 Вариант $\vec{a}=(30;25;20;15)$, $\vec{b}=(10;20;18;12;25)$, $C=\begin{pmatrix}4&8&3&6&7\\8&4&6&5&9\\3&5&8&5&4\\5&8&10&6&8\end{pmatrix}$.	4 Вариант $\vec{a}=(15;16;13;14)$, $\vec{b}=18;12;11;9;19;8)$, $C=\begin{pmatrix}2&3&5&7&9&8\\6&4&2&1&3&5\\3&1&4&7&10&2\\6&10&8&2&7&4\end{pmatrix}$.

Оценка по ТЕМЕ 2

«5» - ответ на вопросы, составление таблицы с учетом баланса

«4» - ответ на вопросы, составление таблицы без учета баланса

«3» - ответ на вопросы